ENSAM 80

SESSION DE 1980

MATHÉMATIQUES

Options T et TA

Épreuve n° 2 (problème)

DURÉE : 3 heures

Les candidats sont invités à soigner la présentation et la rédaction de leur copie.

Ils devront justifier leurs raisonnements en citant des résultats de cours précis et en évitant tout verbiage inutile.

Les parties I *et* II *sont indépendantes. Les parties* III *et* IV *utilisent les résultats de* II.2° *ou* 3°.

I

1° r étant un paramètre réel $\geqslant 0$, on considère la fonction :

$$u_r : t \longmapsto \frac{1}{1 + r^2 - 2r\cos t}$$

Étudier les variations de u_r pour $t \in [-\pi + \pi]$.

2° Calculer, lorsqu'elle existe, l'intégrale $I(r) = \int_{-\pi}^{+\pi} u_r(t)\,dt$.

On utilisera pour la suite la fonction P :

$$P : (r, t) \longmapsto P(r, t) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos t} \quad r \in]-1+1[, \quad t \in \mathbb{R}$$

et les fonctions associées :

$$R_t : r \longmapsto P(r, t) \qquad r \in]-1+1[\quad t \in \mathbb{R}$$

$$S_r : t \longmapsto P(r, t) \qquad r \in]-1+1[\quad t \in \mathbb{R}$$

Tournez la page S. V. P.

II

1° Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fonction rationnelle R_t.

Déterminer son développement en série entière et préciser le rayon de convergence de cette série.

2° On suppose $| r | < 1$. Le résultat de la question précédente donne un développement en série de fonctions de la fonction S_r. Montrer que cette série de fonctions est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

3° Montrer que :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} S_r(\alpha - \theta) \cos k\theta \, d\theta = 2\pi r^k \cos k\alpha \qquad (k \in \mathbb{N})$$

Calculer de la même façon :

$$\int_{-\pi}^{+\pi} S_r(\alpha - \theta) \sin k\theta \, d\theta \qquad (k \in \mathbb{N})$$

III

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par :

D le disque $\{ M \mid \| \overrightarrow{OM} \| < 1 \}$

K le disque $\{ M \mid \| \overrightarrow{OM} \| \leqslant 1 \}$

Γ le cercle de centre O, de rayon 1, orienté dans le sens trigonométrique.

h étant une application continue et bornée de K dans $\mathbb{R}$, on lui associe l'application : $H : D \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(Q) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{1 - \| \overrightarrow{OQ} \|^2}{\| \overrightarrow{MQ} \|^2} h(M) \, ds \text{ pour } Q \in D$$

où s est l'abscisse curviligne sur Γ comptée positivement dans le sens trigonométrique, telle que $s(A) = 0$, où A est le point de coordonnées polaires (1, 0), et M le point courant de Γ.

On se propose dans cette partie de déterminer des fonctions h telles que :

(1) $$H(Q) = h(Q) \quad \forall Q \in D$$

On désignera par (r, α) les coordonnées polaires de Q telles que $r \geqslant 0$ et $\alpha \in [-\pi + \pi[$.

1° On cherche h de la forme $h(M) = f(\rho)$ ($\rho = \| \overrightarrow{OM} \|$), où $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et bornée.

Traduire (1) et en déduire les fonctions h du type indiqué.

2° On cherche maintenant des fonctions h de la forme $h(M) = \psi(\rho) \times \varphi(\theta)$, (ρ, θ) étant les coordonnées polaires de M telles que :

$$\rho \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \theta \in [-\pi + \pi[$$

et où $\varphi : [-\pi + \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sont continues et bornées ($\psi(1) \neq 0$).

Montrer que φ est solution de l'équation (2) :

$$\lambda(r) \varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \alpha - \theta) \varphi(\theta) \, d\theta \qquad \forall \alpha \in [-\pi + \pi[.$$

On précisera λ en fonction de ψ. Que se passerait-il si $\psi(1) = 0$?

3° On considère l'équation (3) : (λ étant un réel non nul)

$$\lambda \Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \alpha - \theta) \Phi(\theta) \, d\theta \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \qquad r \in [0, 1[\text{ fixé.}$$

Montrer (en utilisant le développement de $S_r(\alpha - \theta)$) que toute solution Φ de (3) continue bornée sur $[-\pi + \pi]$ est somme d'une série trigonométrique uniformément convergente sur $\mathbb{R}$.

4° En étudiant les coefficients de Fourier de Φ, déterminer les valeurs de λ pour lesquelles (3) a des solutions continues bornées non nulles.

5° En déduire des solutions de (1) du type défini au 2°.

IV

On considère l'équation (4) (λ étant un réel non nul)

$$\lambda \Phi(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \alpha - \theta) \Phi(\theta) \, d\theta + |\cos \alpha| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \; r \in [0, 1[\text{ fixé}$$

1° Développer en série de Fourier la fonction $\alpha \longmapsto |\cos \alpha|$

2° Déduire de (4) des relations entre λ, les coefficients de Fourier de Φ et ceux de $|\cos \alpha|$

3° Montrer que si λ n'est pas de la forme r^n ($n \in \mathbb{N}$), l'équation (4) a une solution qu'on donnera par son développement en série de Fourier.

4° Que se passe-t-il si $\lambda = r^n$ ($n \in \mathbb{N}$) ?

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail